OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 15.02.2015
CLASA A X- A

SUBIECTUL II

Fie funcția $f : R \to R$, astfel încât $(f \circ f)(x) = -x^3, \forall x \in R$

1) Arătați că funcția f este inversabilă;

2) Precizați dacă există funcții strict monotone cu proprietatea din enunț. Justificați răspunsul.

Rezolvare:

1) Demonstrăm că funcția f este bijectivă, deci inversabilă

Injectivitate:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (f \circ f)(x_1) = (f \circ f)(x_2) \Rightarrow -x_1^3 = -x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ *injectivă* 1p

Surjectivitate:

Considerăm funcția $g : R \to R, g(x) = -x^3$, strict descrescătoare, $\text{Im} g = R$, deci g bijectivă

$\Rightarrow f$ surjectivă.....1p

Deci f bijectivă, deci inversabilă.....1p

2) Presupunem că f este strict monotonă, rezultă că $(f \circ f)$ este strict crescătoare.....2p

Dar funcția $g : R \to R, g(x) = -x^3$ este strict descrescătoare, deci nu există funcții strict monotone cu proprietatea din enunț.....2p